Résumé 02 : Matrices & Déterminants

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ sera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Les bases

§ 1. ***L'opérateur*** L_A.– Toute application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est l'application linéaire canoniquement associée à une matrice. Plus clairement,

Proposition 1.1

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. L'application $\Psi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \\ A & \longmapsto & L_A \end{array}\right.$ *est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$ev.*

On en déduit au passage que $\dim \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) = n \times p$.
On peut caractériser ainsi les matrices triangulaires :

Proposition 1.2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} A \text{ est triangulaire supérieure} &\iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_i) \text{ est stable par } L_A \\ &\iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad Ae_i \in \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_i). \end{aligned}$$

D'ailleurs, on peut enlever le cas $i = n$ qui n'amène rien à l'affaire.

§ 2. ***Produit.***– On définit une loi sur $\mathscr{M}_n$ qui traduit matriciellement la loi de composition sur les endomorphismes.

Définition 1.3 (*Produit de Matrices*)

Soient $n, p, m \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K})$. La matrice $C \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par la formule

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j},$$

est appelée produit de A et B et notée $A \times B$, ou AB.
On définit ainsi une loi interne que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On peut tout de suite énoncer, car c'est pour obtenir cette relation que nous avons construit ce produit :

Proposition 1.4

Soient $n, p, m \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K})$. Alors $L_{A \times B} = L_A \circ L_B$.

Exemples :

- $I_n A = A I_p = A$.
- AB a sa $j-$ème colonne nulle si la $j-$ième colonne de B l'est, et sa $j-$ème ligne nulle si la $j-$ième ligne de A l'est.
- $A \times B = (AC_1, \ldots, AC_n)$ où $(C_1, \ldots, C_n)$ sont les colonnes de B.
- Si C et L sont un vecteur colonne et un vecteur ligne, $CL \in \mathscr{M}_n$ est de rang 1 et LC n'est rien d'autre qu'un réel.
- $AB \neq BA$, avec E_{12} et E_{11}.
- L'anneau n'est pas intègre, avec le même exemple. D'ailleurs E_{12} est nilpotente.
- $E_{ij} \times E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$.
- Soit A une matrice carrée. L_A est un projecteur $\iff A^2 = A$
- Soit $A = \left(a_{ij}\right)$ et $D = \text{Diag}\,(d_1, \ldots, d_n)$. ALors
  $DA = \left(d_i a_{ij}\right)$ et $AD = \left(d_j a_{ij}\right)$.
- Vu en TD : le commutant d'une matrice M est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$. Il est égal à $\mathscr{M}_n$ si et seulement si M est une homothétie, i.e ssi $M \in \text{Vect}\, I_n$.

Proposition 1.5 (*Produit de matrices triangulaires*)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A, B sont deux matrices triangulaires supérieures, alors leur produit $A \times B$ est aussi triangulaire supérieur et sa diagonale est égale à $(a_{11}b_{11}, \ldots, a_{nn}b_{nn})$.

Remarques :

Calcul de certaines suites récurrentes :

▷ Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -9x_n & -18y_n \\ y_{n+1} &= 6x_n & +12y_n \end{cases}$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$. Il s'agit de déterminer les termes généraux de ces deux suites en fonction de n, et non plus en fonction des termes qui les précèdent. Traduisons ce problème en termes matriciels : en posant $A = \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$, et $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit que la formule de récurrence croisée qui régit nos deux suites devient une formule de récurrence simple portant sur un vecteur de $\mathbb{R}^2$: $U_{n+1} = AU_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On déduit aisément de ceci l'expression de U_n en fonction de A, de U_0 et de n : $\boxed{U_n = A^n U_0}$. Ainsi le calcul de U_n se ramène à celui des puissances de A. Nous verrons plus loin des méthodes pour calculer ces puissances.

▷ Soit (x_n) une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_n + bv_n$, où $a, b \in \mathbb{C}$ et $b \neq 0$. Cett relation est équivalente à $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} X_n$, où $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

§ 3. ***Trace.—*** La trace d'une matrice <u>carrée</u> est la somme de ses coefficients diagonaux. L'application Trace : $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire. Elle vérifie la propriété essentielle suivante :

Propriétés 1.6

Pour tous $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, Trace $(AB) =$ Trace (BA).

§ 4. ***Inversibilité.—*** Les matrices inversibles seront les matrices d'isomorphismes.

Définition 1.7

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. B est alors unique, et notée A^{-1}. On note $GL_n(\mathbb{K})$ l' ensemble des matrices inversibles.

Théorème 1.8

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. on a l'équivalence entre toutes les propriétés suivantes :
A est inversible $\Leftrightarrow L_A$ est bijective $\Leftrightarrow \ker A = \{0\} \Leftrightarrow$ Rang $A = n \Longleftrightarrow \det A \neq 0$.

Exemples de produits :

▷ Une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible $\Longleftrightarrow$ son déterminant est non nul. Alors,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

▷ Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles. Alors leur produit $A \times B$ est ausi inversible et

$$\boxed{(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}}.$$

Propriétés 1.9 (*Le groupe linéaire*)

Muni de la loi $\times$, $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe, appelé groupe linéaire. Il n'est pas commutatif sauf si $n = 1$.

Proposition 1.10 (*Inversion de matrices triangulaires*)

Soit $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors

▷ *T est inversible $\Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad t_{ii} \neq 0$.*

▷ *Si $T \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $T^{-1} \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ et les coefficients diagonaux de T^{-1} sont les inverses des coefficients diagonaux de T.*

Définition 1.11 (*Système de Cramer*)

Un système linéaire $AX = B$ à n inconnues et à n équations est dit de Cramer lorsqu'il possède une et une seule solution.

Ainsi, le système $AX = B$ est de Cramer si et seulement si A est inversible. L'unique solution est $X = A^{-1}B$.

§ 5. ***Lignes et colonnes.–*** On sera souvent conduit à mutiplier une matrice A par une matrice inversible dès que l'on s'intéressera aux endomorphismes. Le point essentiel de cette opération est qu'elle préserve le rang. Plus précisément :

Proposition 1.12 (*Conservation du rang*)

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}$. Alors :

1. $\forall P \in GL_n, \ker\big(P \times A\big) = \ker A$.
2. $\forall Q \in GL_p, \text{Im}\,\big(A \times Q\big) = \text{Im}\,A$.
3. $\boxed{\forall P \in GL_n, \forall Q \in GL_p, \text{Rang}\,\big(PAQ\big) = \text{Rang}\,A}$.

Remarques :

Rappelons quelques faits énoncés lors de la définition du produit matriciel. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}$. Notons C_j ses colonnes et L_i ses lignes. Les $E_{i,j}$ sont les matrices élémentaires, de taille convenable pour que les produits que nous effectuons soient licites.

- Multiplication à gauche : $E_{ij}A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, la ligne L_j apparaissant à la $i-$ème place.
- Multiplication à droite : $AE_{ij} = \big(0, \ldots, C_i, \ldots 0\big)$, la colonne C_i apparaissant à la $j-$ème place.

Rappelons que nous avons défini trois opérations élémentaires sur A lors de l'algorithme de Gauss.
Définissons trois types de matrices simples :

Définition 1.13 (*de $P_{ij}, E_i(\alpha), E_{ij}(\alpha)$*)

- *Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$. $E_i(\alpha) = \text{Diag}\,(1, \ldots, 1, \alpha, 1 \ldots, 1)$ est la matrice identité où l'on a remplacé le $i-$ème coefficient par c sur la diagonale.*
- *Soient $i \neq j \in [\![1, n]\!]$. P_{ij} est la matrice identité où l'on a permuté les colonnes (ou les lignes) i et j*
- *Soient $i \neq j \in [\![1, n]\!], \alpha \in \mathbb{K}$. $E_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ij}$.*

Ces trois types de matrices sont inversibles et stables par passage à l'inverse :

$$\boxed{E_i(\alpha) = E_i(\alpha^{-1}), P_{ij}^{-1} = P_{ij}, E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)}.$$

Faire des opérations élémentaires sur les colonnes de A revient à multiplier A à droite par une suite de matrices inversibles :

Proposition 1.14 (*Manipulation élémentaire et produit matriciel*)

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. *Si $A \xrightarrow{C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j} B$, alors $B = A \times E_{ji}(\alpha)$.*
2. *Si $A \xrightarrow{C_i \leftarrow \alpha C_i} B$, alors $B = A \times E_i(\alpha)$.*
3. *Si $A \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} B$, alors $B = A \times P_{ij}$.*

On obtient un résultat strictement indentique en remplaçant “colonne” par “ligne” et en multipliant A à gauche par les trois types de matrices définis ci- dessus.

Corollaire 1.15 (*Invariance par manipulation élémentaire*)

Les manipulations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice en conservent le rang.
Celles sur les lignes conservent de plus le noyau, et celles sur les colonnes conservent l'image.

On en déduit de plus une nouvelle méthode de calcul de l'inverse d'une matrice.

Propriétés 1.16 (*Transposée*)

1. ${}^t({}^tA) = A$.
2. La transposée est linéaire.
3. Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), {}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.
4. Si A est inversible, alors ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

Corollaire 1.17

Soit A une matrice $n \times p$. Alors

1. *A et ${}^tA$ ont même rang.*
2. *le rang de la famille des p colonnes de A est égal à celui des n lignes de A.*

§ 6. ***Matrices équivalentes et rang sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.–*** Nous allons définir une relation d'équivalence sur l'espace des matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, que nous appellerons malheureusement "est équivalente à".

Définition 1.18

Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites **équivalentes** *lorsque il existe $P \in GL_p$ et $Q \in GL_n$ telles que $B = Q^{-1}AP$.*

Deux matrices équivalentes n'ont pas forcément même trace, ni même déterminant. En revanche, elles ont même rang, et cette condition est nécessaire et suffisante. La relation "est équivalente a" est donc TRES souple, puisqu'il y a peu de classes d'équivalences : $n + 1$ exactement. On verra que ce n'est pas du tout le cas pour la relation bien plus riche "est semblable à". C'est d'ailleurs tout l'objet du cours de deuxième année. Le théorème qui suit est une conséquence (plutôt technique) de l'algorithme de Gauss.

Théorème 1.19

Deux matrices sont équivalentes $\Longleftrightarrow$ elles ont même rang. En particulier, si on note r le rang de M, M est semblable à Diag$(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, matrice qui contient exactement r coefficients égaux à 1.

Proposition 1.20 (*Rang et matrices extraites*)

Toute matrice extraite de M a un rang $\leqslant$ celui de M.De plus, le rang de M est le maximum des rangs des matrices carrées extraites de M.

§ 7. ***Matrices semblables et invariants de similitude.–*** Cette relation est plus fine que la précédente, et propose beaucoup plus de connexions entre deux matrices de la même classe d'équivalence.

Définition 1.21

Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites **semblables** *lorsque il existe $P \in GL_n$ telle que $B = P^{-1}AP$.*
L'ensemble des matrices semblables à A est appelée **classe de similitude de** A.

Les trois affirmations qui suivent sont fausses si A et B ne sont qu'équivalentes :

Proposition 1.22

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$, alors

- *Pour tout $k \in \mathbb{N}, B^k = P^{-1}A^kP$.*
- *Trace A = Trace B.*
- $\det A = \det B$.

On dit que la trace et le déterminant sont des **invariants de similitude**.

2 Matrices d'applications linéaires

Tous les espaces vectoriels seront de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Nous étendons les possibilités du calcul matriciel à l'ensemble des applications linéaires de dimension finie. Ces matrices dépendront fortement d'une base choisie pour le calcul des coordonnées de vecteurs, et nous nous attacherons à expliquer comment elle en dépend. Gardons à l'esprit qu'une bonne définition de ces matrices doit respecter le morphisme déjà maintes fois utilisé :

$$\text{Mat } (f \circ g) = \text{Mat } (f) \times \text{Mat } (g).$$

§ 1. ***Des vecteurs aux vecteurs colonnes.–*** C'est un petit rappel.

Définition 2.1

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $X \in E$, on appelle **matrice-colonne des composantes de** X **dans** $\mathscr{B}$ *le vecteur*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n,$$

où $X = \sum_{k=1}^{n} x_k.e_k$.

Exemples :

Dans $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathscr{B}$ est la base canonique et $P(X) = (X+1)^n$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ \frac{n(n-1)}{2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il est clair que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(X) \end{array} \right.$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels de dimension n.

§ 2. ***Matrices d'applications linéaires.–*** De manière plus générale, on peut aussi définir :

Définition 2.2

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour toute famille $\mathscr{F} = (X_1, \ldots X_p)$ de vecteurs de E, on appelle **matrice des composantes de** $\mathscr{F}$ **dans** $\mathscr{B}$ *le vecteur* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(X) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \ldots & x_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \ldots & x_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

où pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $X_j = \sum_{k=1}^{n} x_{k,j}.e_k$.

Définition 2.3 (*Matrice d'une application linéaire*)

Soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, et $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F, et $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle matrice de φ dans les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ la matrice suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\ K),$$

où pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $\varphi(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}.f_k$.

Exemples :

▷ L'application linéaire associée à l'évaluation lagrangienne, i.e

$$\psi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \begin{pmatrix} P(a_0) \\ P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

admet pour matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathbb{R}^{n+1}$ une matrice de Van Der Monde.

Propriétés 2.4

Soit $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, et $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. L'application

$$\Psi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(f) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$algèbres.

Proposition 2.5

Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}, \mathcal{G}$ des bases des espaces vectoriels E, F, G.

- *Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $\text{Mat}_{\mathscr{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathscr{F},\mathcal{G}}(g) \times \text{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(f)$.*
- *Si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Mat}_{\mathscr{E}}(f^k) = (\text{Mat}_{\mathscr{E}}(f))^k$.*

Proposition 2.6

Si A est la matrice de f dans une base (ou un couple de bases), alors Rang $A =$ Rang f.

Remarques :

Il faut savoir interpréter les blocs de zéros dans la matrice de f comme la stabilité de sous-espaces vectoriels stables. Par exemple,

- La matrice d'un endomorphisme f de E est triangulaire $\Leftrightarrow$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, Vect $(e_1, \dots e_k)$ est stable par f.
- Soit $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$. $\text{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où A est carrée de taille $k \Leftrightarrow$ Vect $(e_1, \dots, e_k)$ est stable par f.
- Si $E = \oplus_{i=1}^n F_i$, si tous les F_i sont stables par f et si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à cette décomposition de E, alors la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs.

§ 3. ***Matrices d'endomorphismes.–*** Dans le cas où $E = F$ et $\mathscr{E} = \mathscr{F}$, nous obtenons :

Définition 2.7 (*Matrice d'endomorphisme*)

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $f \in \mathscr{L}(E)$. On appelle matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ la matrice carrée suivante :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),$$

où pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $f(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}.e_k$.

La construction de cette matrice s'effectue selon les colonnes. La colonne 1 nous est donnée par l'image du premier vecteur de $\mathscr{B}$ par f.

Exemples :

- Ecrire la matrice de $f : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P(X+1) \in \mathbb{R}_3[X]$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$, puis la base $\mathscr{B}_1 = \big(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2)\big)$.
- Même question avec $g : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique.
- Soit $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-z \\ 2y-3z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

  MORALITE : Dans le cours sur les applications linéaires, nous avions construit une application

$$L \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \\ A & \longmapsto & L_A \end{array} \right. .$$

  Nous venons maintenant de définir une nouvelle application

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}_0} \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f) \end{array} \right. .$$

  Ce ne sont pas de trop mauvaises définitions puisqu'elles sont réciproques l'une de l'autre si $\mathscr{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ce qui signifie que la matrice de L_A dans la base canonique est A et que l'endomorphisme canoniquement associé à $\text{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f)$ est f :

$$\begin{array}{ll} \forall f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), & L_{\text{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f)} = f, \\ \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), & \text{Mat}_{\mathscr{B}_0}(L_A) = A. \end{array}$$

Proposition 2.8

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors,

1. *f est un projecteur de $E \iff$ il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle*
$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \text{Diag}\,(1,\dots,1,0,\dots,0) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$
2. *f est une symétrie de $E \iff$ il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle*
$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \text{Diag}\,(1,\dots,1,-1,\dots,-1) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

D'après le théorème d'interpolation linéaire, nous obtenons

Propriétés 2.9

Soit $\mathscr{E} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de E. Alors, l'application

$$\Psi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathscr{E}}(f) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$algèbres.

§ 4. ***Changements de base et matrices de passage.***— Nous allons traduire sur les applications linéaires les relations d'équivalence vues sur les matrices.

Définition 2.10

Soit E un ev de dimension n et $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et on note $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n$, où $\forall j \in [\![1,n]\!], e'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \text{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id)$.

Proposition 2.11

Soient $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \mathscr{B}_3$ trois bases de E.

1. $P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_1} = I_n$
2. $P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} \times P_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_3} = P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_3}$.
3. $P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} = (P_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_1})^{-1}$.

Réciproquement, si on se fixe $\mathscr{B}$, l'application qui à $\mathscr{B}'$ associe P est bijective dans GL_n, i.e toute matrice inversible peut être vue comme une matrice de passage.

Théorème 2.12 (*de changement de base*)

- **Pour les vecteurs :** *Soit $x \in E$, X, X' ses matrices coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E. Alors $X' = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} X$.*
- **Pour les endomorphismes :** *Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $f \in \mathscr{L}(E)$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Alors, si on note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, on a $\boxed{M' = P^{-1}MP}$.*
- **Pour les applications linéaires :** *Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ deux bases de F,$f \in \mathscr{L}(E, F)$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},calf}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{F}'}(f)$. Alors, si on note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}, P = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}$ on a $\boxed{M' = Q^{-1}MP}$.*

§ 5. ***la Trace d'un endomorphisme.—*** On appelle trace d'un endomorphisme f de E la trace de sa matrice dans n'importe quelle base. Cette définition tient la route car deux matrices semblables ont même trace.

Propriétés 2.13

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

- *Trace $: \mathscr{L}(E) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.*
- *Trace $(f \circ g) =$ Trace $(g \circ f)$.*
- *Si f est un projecteur, sa trace est égale à son rang.*

3 Déterminants

Tout le programme de MPSI.

A Les preuves à connaitre...

- Aucune

B Les figures imposées

Exercices :

1./ ***CCP algèbre 59 :*** Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall\, P \in E,\, f(P) = P - P'$.

(a) Démontrer que f est bijectif de deux manières :

i. sans utiliser de matrice de f,

ii. en utilisant une matrice de f.

(b) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

2./ ***CCP algèbre 71 :*** Soit p, la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x+y+z=0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

(a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

(b) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

3./ ***CCP algèbre 87 :*** Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

(a) Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in \{0, \cdots, n\}\ P(a_i) = b_i.$$

(b) Soit $k \in [\![0, \ldots, n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :

$$\forall i \in [\![0, \ldots, n]\!]\ b_i = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$$

(c) Prouver que $\forall p \in [\![0, \ldots, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

4./ ***CCP algèbre 90 :*** $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

(a) Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(b) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\},\ L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

i. Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

ii. Exprimer les polynà´mes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

(c) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

(d) *Application :* On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.